

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
“ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”**

Конохов В.І.

Погорілов С.Ю.

Конкін В.М.

**“ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ
ПЕРЕРІЗІВ”**

Навчально - методичний посібник з розділу курсу Опір матеріалів
для студентів машинобудівних спеціальностей

ЗАТВЕРДЖЕНО
редакційно – видавничою
радою університету,
протокол № 1
від „ 16 ” січня 2019 р.

Харків НТУ “ХПІ”

УДК 620.17

К 64

Рецензенти:

Д.В. Лавінський, канд. техн. наук, доц.,

Національний технічний університет „Харківський політехнічний інститут”

С.А. Вамболь, канд. техн. наук, доц.,

Національний університет цивільного захисту України

Конохов В.І.

К 64 Геометричні характеристики плоских перерізів: навчально - методичний посібник з розділу курсу “Опір матеріалів” для студентів машинобудівних спеціальностей, / Конохов В.І., Погорілов С.Ю., Конкін В.М. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2019 – 44 с.

ISBN

В посібнику розглядаються основні геометричні характеристики поперечних перерізів стрижня, які визначають його опір різним видам деформацій.

Посібник призначений для студентів машинобудівних спеціальностей. Може бути корисним для викладачів, а також для аспірантів та наукових працівників, які у своїй практичній діяльності зустрічаються з необхідністю розрахунків стержнів при різних видах деформації.

Іл. 13. Бібліогр. 2 назв.

УДК 620.17

ISBN

© В.І. Конохов, С.Ю. Погорілов

© В.М. Конкін, 2019

Зміст

Вступ	4
1. Площа поперечного перерізу	5
2. Статичні моменти площі	5
Приклад 1	8
3. Моменти інерції плоских фігур	9
3.1. Осьовий (екваторіальний) момент інерції	9
3.2. Полярний момент інерції	9
3.3. Відцентровий момент інерції	10
3.4. Властивості моментів інерції	10
3.5. Визначення моментів інерції простих фігур	11
3.6. Моменти інерції відносно паралельних осей	13
3.7. Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей	16
3.8. Визначення напрямку головних осей інерції. Головні моменти інерції ...	18
3.9. Поняття про радіус інерції	21
4 Моменти опору поперечних перерізів	22
5 Порядок визначення геометричних характеристик .	23
Приклад 2	24
Приклад 3	27
6 Розрахунково - проектувальне завдання	31
6.1 Склад розрахунково - проектувального завдання	31
Додаток А	32
Додаток Б	35
СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ	42

Вступ

Основним об'єктом, який вивчається у курсі опору матеріалів, є стрижень.

Опір стрижня різним видам деформації залежить не тільки від матеріалу та розмірів стрижня, а й від форми та розташування поперечних перерізів. Тому, незалежно від на фізичних властивостей об'єкта, необхідно розглядати основні геометричні характеристики його поперечних перерізів, які визначають опір різним видам деформацій.

Розглянемо довільну фігуру (поперечний переріз бруса), зв'язану з координатними осями Ox та Oy (рис. 1). Виділимо елемент площі dA з координатами x , y .

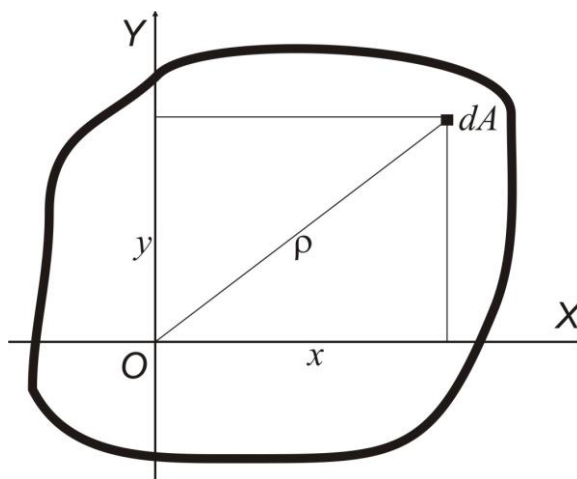


Рис. 1

Практично всі геометричні характеристики плоских поперечних перерізів можна визначити використовуючи інтеграл:

$$\int_A x^m \cdot y^n \cdot dA, \quad (1)$$

де A – площа перерізу;

m, n – цілі константи;

x, y – координати елементарної площини dA (рис. 1).

1. Площа поперечного перерізу

Розглянемо інтеграл (1) при $m = 0, n = 0$:

$$\int_A x^0 \cdot y^0 \cdot dA = \int_A dA = A. \quad (2)$$

Площі перерізів, що мають форму простих фігур визначаються за формулами, відомими з геометрії.

Площа поперечного перерізу виражається в одиницях довжини в другому ступені (наприклад, м^2).

Площа поперечного перерізу складної фігури дорівнює алгебраїчній сумі простих фігур, що складають переріз.

2. Статичні моменти площі

За аналогією з виразом для моменту сили відносно будь-якої осі можна записати вираз і для моменту площі, який називають статичним моментом. Так, добуток елемента площі dA на відстань y від осі Ox можна записати виразом:

$$dS_x = y \cdot dA.$$

Підсумувавши такі добутки по всій площі A фігури, дістанемо при $m = 0, n = 1$:

$$S_x = \int_A x^0 \cdot y^1 \cdot dA = \int_A y \cdot dA. \quad (3)$$

Аналогічно, можна визначити статичний момент площі відносно осі Oy при $m = 1, n = 0$:

$$S_y = \int_A x^1 \cdot y^0 \cdot dA = \int_A x \cdot dA. \quad (4)$$

Статичний момент виражається в одиницях довжини в третьому ступені (наприклад, м^3).

Позначимо через x_c , y_c координати центра ваги (ц. в.) фігури (рис.2).

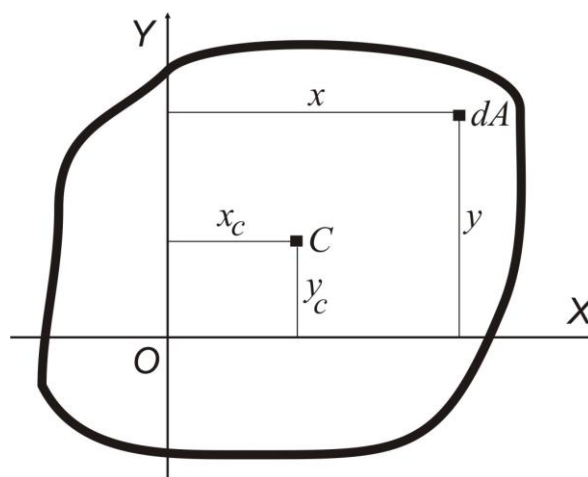


Рис. 2

Продовжуючи аналогію з моментами сил, на підставі теореми про момент рівнодійної можна записати такі вирази:

$$S_x = y_c \cdot A; \quad S_y = x_c \cdot A. \quad (5)$$

Звідси координати центра ваги:

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A}. \quad (6)$$

Із формул (5) випливає, що статичні моменти площі відносно центральних осей, тобто осей, що проходять через центр ваги, дорівнюють нулю.

Для визначення статичних моментів складної фігури її розбивають на прості частини (рис. 3), для кожної з яких відомі площа A_i та положення центра ваги x_{c_i}, y_{c_i} .

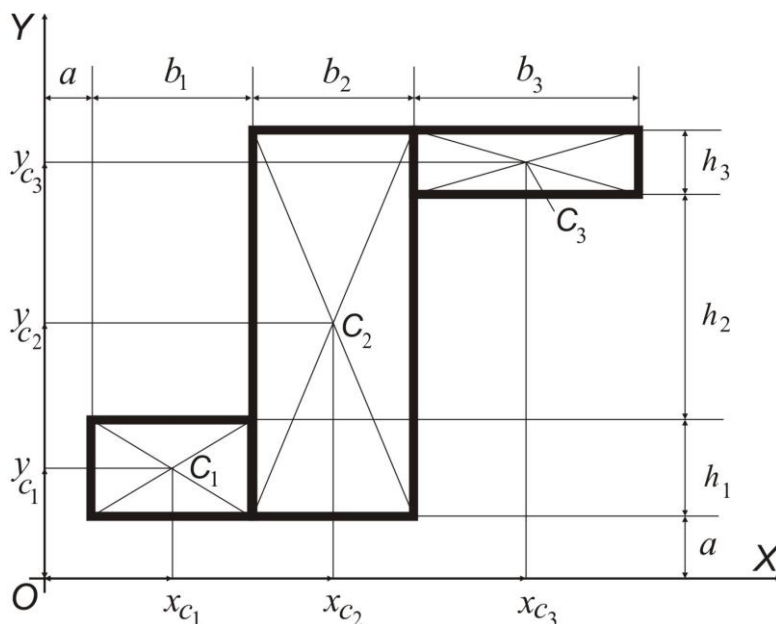


Рис. 3

Статичний момент площі складної фігури відносно даної осі визначається як алгебраїчна сума статичних моментів кожної частини:

$$S_x = y_{c_1} \cdot A_1 + y_{c_2} \cdot A_2 + \dots + y_{c_n} \cdot A_n = \sum_{i=1}^n y_{c_i} \cdot A_i; \quad (7)$$

$$S_y = x_{c_1} \cdot A_1 + x_{c_2} \cdot A_2 + \dots + x_{c_n} \cdot A_n = \sum_{i=1}^n x_{c_i} \cdot A_i.$$

За формулами (6) та (7) легко знайти координати центра ваги складної фігури:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{c_i} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{c_i} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (8)$$

Приклад 1

Визначити статичні моменти відносно координатних осей та координати центра ваги фігури, показаної на рис. 3. Розміри окремих частин дорівнюють:

$$a = 1 \text{ см}; b_1 = 6 \text{ см}, \quad b_2 = 4 \text{ см}, \quad b_3 = 8 \text{ см}, \quad h_1 = 4 \text{ см}, \quad h_2 = 12 \text{ см}, \quad h_3 = 2 \text{ см}.$$

Координати центрів ваги окремих простих фігур можна визначити:

$$x_{c_1} = a + \frac{b_1}{2} = 4 \text{ см}, \quad y_{c_1} = a + \frac{h_1}{2} = 3 \text{ см};$$

$$x_{c_2} = a + b_1 + \frac{b_2}{2} = 9 \text{ см}, \quad y_{c_2} = a + \frac{h_1 + h_2 + h_3}{2} = 10 \text{ см};$$

$$x_{c_3} = a + b_1 + b_2 + \frac{b_3}{2} = 13 \text{ см}, \quad y_{c_3} = a + h_1 + h_2 + \frac{h_3}{2} = 18 \text{ см}.$$

Площі поперечних перерізів простих фігур:

$$A_1 = b_1 \cdot h_1 = 24 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = b_2 \cdot (h_1 + h_2 + h_3) = 72 \text{ см}^2;$$

$$A_3 = b_3 \cdot h_3 = 16 \text{ см}^2.$$

$$\text{Загальна площа: } A = \sum_{i=1}^3 A_i = 24 + 72 + 16 = 112 \text{ см}^2.$$

Статичні моменти перерізів відносно координатних осей Ox та Oy визначаються:

$$S_x = \sum_{i=1}^n y_{c_i} \cdot A_i = 24 \cdot 3 + 72 \cdot 10 + 16 \cdot 18 = 1080 \text{ см}^3;$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n x_{c_i} \cdot A_i = 24 \cdot 4 + 72 \cdot 9 + 16 \cdot 13 = 952 \text{ см}^3.$$

Координати центра ваги в системі координат xOy :

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{c_i} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{952}{112} = 8,50 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{c_i} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{1080}{112} \approx 9,64 \text{ см}.$$

3. Моменти інерції плоских фігур

3.1. Осьовий (екваторіальний) момент інерції

Осьовим, або екваторіальним моментом інерції площі фігури називається інтеграл добутків площ елементарних площадок на квадрати відстаней їх від розглядуваної осі, що лежить у площині фігури (див. рис.1).

При комбінації коефіцієнтів $m = 0, n = 2$ отримаємо:

$$I_x = \int_A x^0 \cdot y^2 \cdot dA = \int_A y^2 \cdot dA. \quad (9)$$

При комбінації коефіцієнтів $m = 2, n = 0$ отримаємо:

$$I_y = \int_A x^2 \cdot y^0 \cdot dA = \int_A x^2 \cdot dA. \quad (10)$$

3.2. Полярний момент інерції

Полярним моментом інерції площі фігури відносно даної точки (полюса O) називають інтеграл добутків площ елементарних площадок на квадрати відстаней їх від полюса (див. рис. 1).

$$I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA. \quad (11)$$

Якщо через полюс співпадає з початком прямокутних координатних осей Ox та Oy , то $\rho^2 = x^2 + y^2$. Тоді з виразу (11) маємо:

$$I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA = \int_A x^2 \cdot dA + \int_A y^2 \cdot dA = I_x + I_y. \quad (12)$$

3.3. Відцентровий момент інерції

Відцентровим моментом інерції називають інтеграл добутків площ елементарних площадок на відстані їх від осей Ox та Oy ($m=1, n=1$):

$$I_{xy} = \int_A x^1 \cdot y^1 \cdot dA = \int_A x \cdot y \cdot dA. \quad (13)$$

3.4. Властивості моментів інерції

1. Момент інерції виражається в одиницях довжини в четвертому ступені (наприклад, m^4).
2. Осьові та полярні моменти інерції можуть набирати лише додатних значень.
3. Сума осьових моментів інерції відносно двох координатних осей згідно (12) дорівнює полярному моменту інерції.
4. Відцентровий момент інерції залежно від положення осей може бути додатним чи від'ємним або дорівнювати нулю. Очевидно, що при поступовому повороті осей можна знайти таке положення їх, при якому відцентровий момент інерції дорівнюватиме нулю. Такі осі називають головними осями інерції. Дві взаємно перпендикулярні осі, з яких хоча б одна є віссю симетрії фігури, завжди будуть її головними осями, оскільки в цьому разі кожній додатній величині $x \cdot y \cdot dA$ відповідає така сама від'ємна по інший бік осі симетрії і сума їх по всій площі фігури дорівнює нулю.

5. Головні осі, що проходять через центр ваги перерізу, називають головними центральними осями.

6. Момент інерції складного поперечного перерізу дорівнює алгебраїчній сумі моментів інерції простих фігур, з яких складається переріз відносно відповідних координатних осей.

3.5. Визначення моментів інерції простих фігур

1. Прямокутник

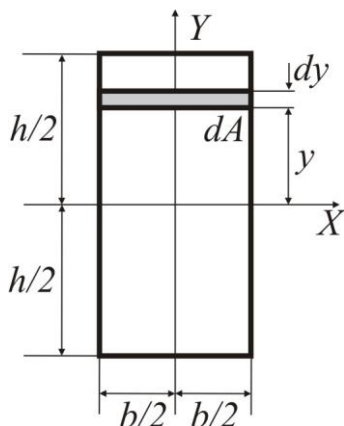


Рис. 4

Визначити моменти інерції прямокутника відносно центральних осей Ox та Oy , паралельних його сторонам (рис. 4).

Для визначення моменту інерції відносно осі Ox елементарною площадкою будемо вважати безмежно вузький прямокутник, паралельний цій осі, заввишки dy та завширшки b .

Площа безмежно вузького прямокутника: $dA = b \cdot dy$. Згідно з (9):

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{12}. \quad (14)$$

Очевидно, що

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}. \quad (15)$$

2. Круг

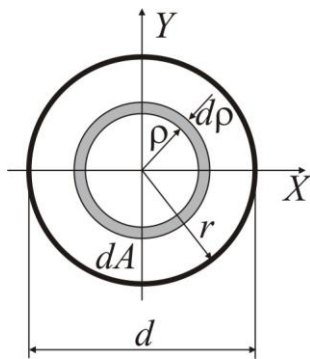


Рис. 5

Визначити моменти інерції круглого поперечного перерізу.

Визначення почнемо з полярного моменту інерції.

Виділимо елементарну площадку у вигляді безмежно тонкого кільця радіусом ρ завтовшки $d\rho$ (рис. 5).

Площа такого елемента $dA = 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho$.

Полярний момент інерції:

$$I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA = 2\pi \int_0^r \rho^3 \cdot d\rho = \frac{\pi \cdot r^4}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}. \quad (16)$$

Моменти інерції площі круга відносно центральних осей легко знайти, використовуючи формулу (12). Унаслідок симетрії $I_x = I_y$, отже,

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_p = \frac{\pi \cdot r^4}{4} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}. \quad (17)$$

3. Кільце

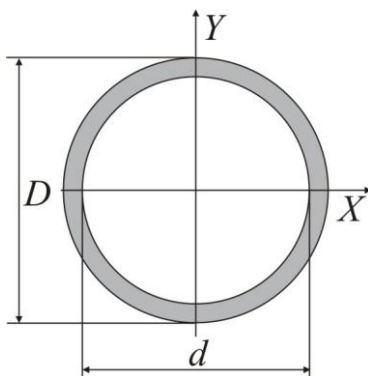


Рис. 6

Визначити моменти інерції кільцевого поперечного перерізу.

Скориставшись властивостями моментів інерції складного поперечного перерізу, можна записати для осьового моменту інерції:

$$I_x = I_{x_1} - I_{x_2}.$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64} - \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \left(1 - \frac{d^4}{D^4} \right) = \frac{\pi \cdot D^4}{64} (1 - c^4), \quad (18)$$

де $c = \frac{d}{D}$.

Полярний момент інерції дорівнюватиме:

$$I_p = I_x + I_y = 2 \cdot I_x = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - c^4). \quad (19)$$

4. Стандартні прокатні профілі

Для стандартних поперечних перерізів стержнів – кутових рівнобоких (рис. 7, а) та нерівнобоких (рис. 7, б), двотаврових (рис. 7, в), швелерних (рис. 7, г) та інших – моменти інерції відносно різних осей наведено в таблицях сортаментів ГОСТ 8509–86, ГОСТ 8510–86, ГОСТ 8239–86, ГОСТ 8240–86 поряд із розмірами, площами перерізів, положеннями центрів ваги та іншими характеристиками.

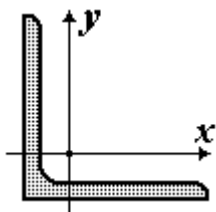


Рис. 7а

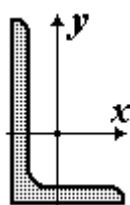


Рис. 7б

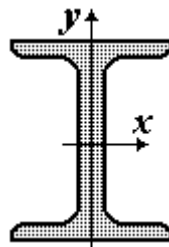


Рис. 7в

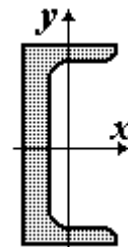


Рис. 7г

У сортаменті центральні осі перерізів позначені літерами x , y . Таблиці сортаментів прокатних профілів наведено в додатку Б.

3.6. Моменти інерції відносно паралельних осей

При розв'язанні різних практичних задач часто виникає потреба визначити моменти інерції складних перерізів відносно тих, чи інших осей, що лежать у площині фігури. Якщо відомі моменти інерції відносно центральних осей фігури

I_x, I_y, I_{xy} , можна визначити значення моментів інерції відносно осей, що паралельні центральним $I_{x_1}, I_{y_1}, I_{x_1 y_1}$ (рис. 8).

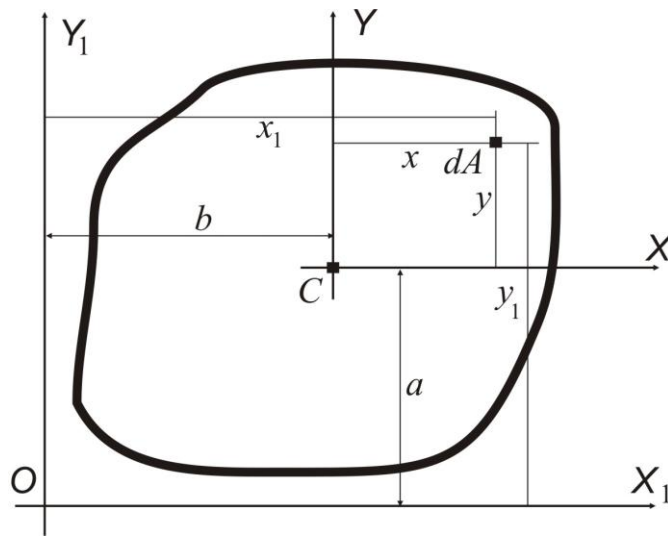


Рис. 8

Координати будь-якої точки в новій системі координат $x_1 O y_1$ можна виразити через координати в старих (центральных – $x C y$) осях:

$$x_1 = x + a; \quad y_1 = y + b.$$

Запишемо вирази для визначення осьового моменту інерції $I_{x_1}, I_{y_1}, I_{x_1 y_1}$ (9), (10), (13):

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int_A y_1^2 \cdot dA = \int_A (y + a)^2 \cdot dA = \\ &= \int_A y^2 \cdot dA + 2a \int_A y \cdot dA + a^2 \int_A dA; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= \int_A x_1^2 \cdot dA = \int_A (x + b)^2 \cdot dA = \\ &= \int_A x^2 \cdot dA + 2b \int_A x \cdot dA + b^2 \int_A dA; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
 I_{x_1 y_1} &= \int_A x_1 y_1 \cdot dA = \int_A (x+b)(y+a) \cdot dA = \\
 &= \int_A xy \cdot dA + b \int_A y \cdot dA + a \int_A x \cdot dA + ab \int_A dA.
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Оскільки інтеграли $\int_A x \cdot dA = S_y$ та $\int_A y \cdot dA = S_x$ дорівнюють нулю як статичні моменти відносно центральних осей, а інтеграл $\int_A dA = A$, то формули

(20) – (22) набувають вигляду:

$$\begin{aligned}
 I_{x_1} &= I_x + a^2 \cdot A; \\
 I_{y_1} &= I_y + b^2 \cdot A; \\
 I_{x_1 y_1} &= I_{xy} + ab \cdot A.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Отже:

- Осьовий момент інерції відносно довільної осі дорівнює осьовому моменту інерції відносно від повільної центральній осі, паралельній даній, плюс добуток площі фігури на квадрат відстані між цими осями.
- Осьові моменти інерції перерізу відносно центральних осей завжди будуть меншими порівняно з осьовими моментами інерції відносно паралельних осей.
- Відцентровий момент інерції відносно довільної системи взаємно перпендикулярних осей дорівнює відцентровому моменту інерції відносно центральних осей, паралельних даним, плюс добуток площі фігури на координати її центра ваги в нових осях. Координати a, b при цьому треба брати з урахуванням їх знака.

3.7. Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей

Нехай відомі моменти інерції I_x, I_y, I_{xy} довільної фігури (рис. 9) відносно координатних осей Ox, Oy .

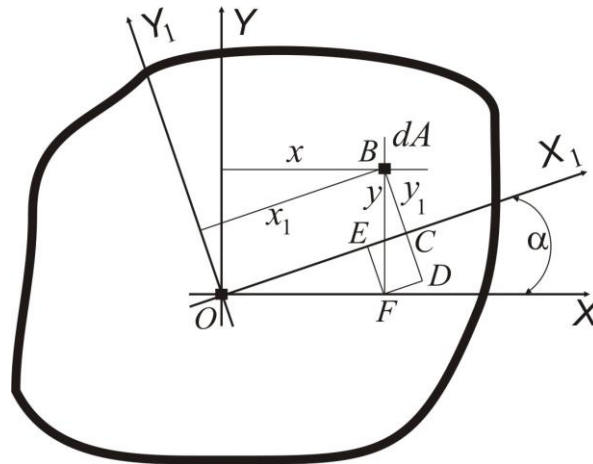


Рис. 9

Повернемо осі Ox, Oy на кут α проти годинникової стрілки, вважаючи такий напрямок повороту додатним, і знайдемо моменти інерції $I_{x_1}, I_{y_1}, I_{x_1 y_1}$ перерізу відносно повернутих осей Ox_1, Oy_1 .

Координати довільної елементарної площадки в нових осях можна виразити через її координати в початковій системі осей наступним чином:

$$\begin{aligned} x_1 &= OC = OE + FD = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha; \\ y_1 &= BC = BD - EF = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (24)$$

Якщо підставити ці значення у формули для визначення $I_{x_1}, I_{y_1}, I_{x_1 y_1}$, матимемо:

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int_A (y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha)^2 \cdot dA = \\ &= \cos^2 \alpha \int_A y^2 \cdot dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 \cdot dA - \sin 2\alpha \int_A xy \cdot dA; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
 I_{y_1} &= \int_A (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)^2 \cdot dA = \\
 &= \cos^2 \alpha \int_A x^2 \cdot dA + \sin^2 \alpha \int_A y^2 \cdot dA + \sin 2\alpha \int_A xy \cdot dA;
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 I_{x_1 y_1} &= \int_A (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha) \cdot (y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha) \cdot dA = \\
 &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_A xy \cdot dA + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(\int_A y^2 \cdot dA - \int_A x^2 \cdot dA \right).
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Ураховуючи формули (9), (10), (13), остаточно знайдемо:

$$I_{x_1} = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha; \tag{28}$$

$$I_{y_1} = I_x \cdot \sin^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \alpha + I_{xy} \cdot \sin 2\alpha;$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} \cdot \cos 2\alpha - \frac{1}{2} (I_y - I_x) \cdot \sin 2\alpha. \tag{29}$$

Зазначимо, що ці формули, здобуті при повороті довільної системи прямокутних осей, звичайно справедливі й для центральних осей.

Додаючи один до одного вирази (28), знаходимо:

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = I_p. \tag{30}$$

Таким чином, при повороті прямокутних осей сума осьових моментів інерції не змінюється і дорівнює полярному моменту інерції відносно початку координат.

При повороті системи осей на кут $\alpha = 90^\circ$:

$$I_{x_1} = I_y; \quad I_{y_1} = I_x; \quad I_{x_1 y_1} = I_{xy}.$$

3.8. Визначення напрямку головних осей інерції. Головні моменти інерції

Найбільше практичне значення мають головні центральні осі, відцентровий момент інерції відносно яких дорівнює нулю. Позначимо такі осі літерами u, v . Отже, $I_{uv} = 0$.

Для визначення положення головних центральних осей несиметричної фігури повернемо довільну початкову систему центральних осей Ox, Oy (рис. 9) на деякий кут $\alpha = \alpha_0$ проти годинникової стрілки, при якому відцентровий момент інерції дорівнюватиме нулю:

$$I_{x_1y_1} = I_{uv} = 0.$$

Тоді з формули (29):

$$I_{x_1y_1} = I_{xy} \cdot \cos 2\alpha_0 - \frac{1}{2}(I_y - I_x) \cdot \sin 2\alpha_0 = 0. \quad (31)$$

звідки:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (32)$$

Визначені за формулою (32) двоє значень кута α різняться між собою на 90° і дають положення головних осей. Менший із цих кутів за модулем не перевищує $\pi/4$. Далі будемо користуватися тільки меншим кутом. Проведену під цим кутом (додатним чи від'ємним) головну вісь будемо позначати літерою u . Нагадаємо, що від'ємні кути α_0 відкладаються від осі x за годинниковою стрілкою. На рис. 10 наведено деякі приклади позначення головних осей згідно із зазначеним правилом. Початкові осі позначено літерами x та y .

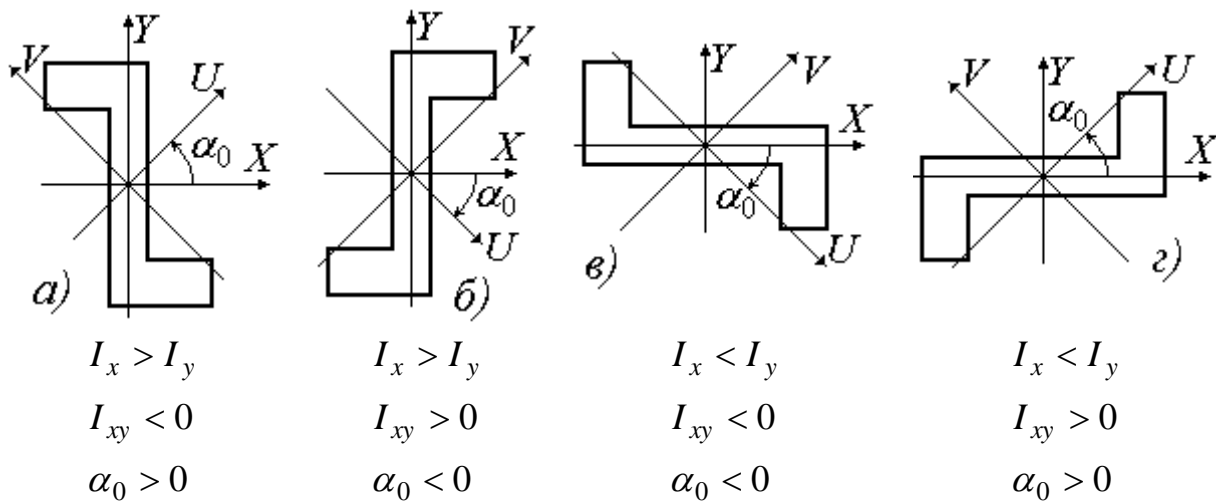


Рис. 10

Головні моменти інерції можна знайти із загальних формул (28) переходу до повернутих осей, взявши $\alpha = \alpha_0$:

$$\begin{aligned} I_u &= I_x \cdot \cos^2 \alpha_0 + I_y \cdot \sin^2 \alpha_0 - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha_0; \\ I_v &= I_x \cdot \sin^2 \alpha_0 + I_y \cdot \cos^2 \alpha_0 + I_{xy} \cdot \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \quad (33)$$

Перетворимо формули (33) для головних центральних моментів інерції, склавши вирази для їхніх суми та різниці. Маємо:

$$I_u + I_v = I_x + I_y; \quad (34)$$

$$I_u - I_v = (I_x - I_y) \cdot \cos 2\alpha_0 - 2I_{xy} \cdot \sin 2\alpha_0 = (I_x - I_y) \frac{4}{\cos 2\alpha_0}, \quad (35)$$

причому у виразі (35) зроблено заміну I_{xy} із формули (32).

Тепер із формул (34) та (35) знаходимо більш зручні вирази:

$$\begin{aligned} I_u &= \frac{1}{2} \left[(I_x + I_y) + (I_x - I_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0} \right]; \\ I_v &= \frac{1}{2} \left[(I_x + I_y) - (I_x - I_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0} \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Очевидно, що при $I_x > I_y$ момент $I_u > I_v$.

Використовуючи формулу (32), можна виключити з виразів (36) величину

$$\frac{1}{\cos 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \frac{4 \cdot I_{xy}^2}{(I_x - I_y)^2}}.$$

У результаті маємо:

$$\begin{aligned} I_u &= \frac{1}{2} \left[(I_x + I_y) \pm \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2} \right]; \\ I_v &= \frac{1}{2} \left[(I_x + I_y) \mp \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2} \right], \end{aligned} \quad (37)$$

причому верхні знаки беремо при $I_x > I_y$, а нижні – при $I_x < I_y$.

Отже, формули (32) і (37) дають змогу визначити положення головних осей та головні центральні моменти інерції.

Якщо тепер замість довільної початкової системи центральних осей xOy взяти головні осі uOv (рис. 11), то формули (28), (29) переходу до повернутих осей істотно спростяться:

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= I_u \cdot \cos^2 \alpha + I_v \cdot \sin^2 \alpha; \\ I_{y_1} &= I_u \cdot \sin^2 \alpha + I_v \cdot \cos^2 \alpha; \\ I_{x_1 y_1} &= \frac{1}{2} (I_u - I_v) \cdot \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (38)$$

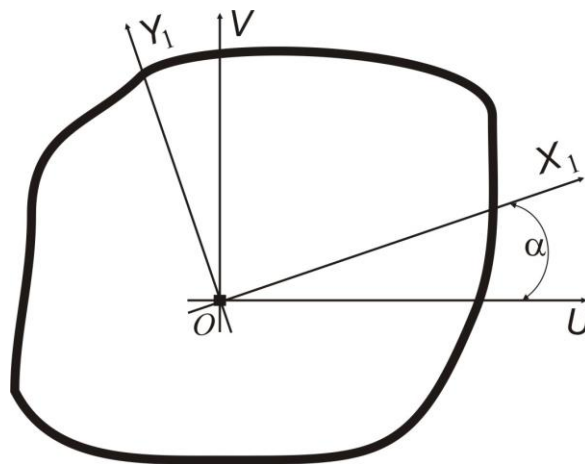


Рис. 11

Важливо зазначити, що головні моменти інерції мають властивість екстремальності. У цьому легко переконатися, про диференціювавши вираз для моменту інерції відносно довільної осі (див. формули 28) по змінній α :

$$\begin{aligned}\frac{dI_{x_1}}{d\alpha} &= -I_x \cdot \sin 2\alpha + I_y \cdot \sin 2\alpha - 2 \cdot I_{xy} \cdot \cos 2\alpha = \\ &= -2 \left(I_{xy} \cdot \cos 2\alpha - \frac{I_y - I_x}{2} \cdot \sin 2\alpha \right) = -2 \cdot I_{x_1 y_1}.\end{aligned}$$

Звідси виливає, що похідна $\frac{dI_{x_1}}{d\alpha}$ дорівнює нулю, коли $I_{x_1 y_1} = 0$, а це означає, що екстремальні значення мають моменти інерції відносно головних осей.

Ураховуючи, що сума моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей є сталою величиною, можна зробити висновок, що відносно однієї з головних осей момент інерції має максимальне значення, а відносно іншої – мінімальне.

Зауважимо, що площини, проведені через вісь стержня та головні осі його поперечного перерізу, називаються головними площинами.

3.9. Поняття про радіус інерції

Момент інерції фігури відносно будь-якої осі можна подати у вигляді добутку площі фігури на квадрат деякої величини, що називають радіусом інерції:

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = A \cdot i_x^2, \quad (39)$$

де i_x – радіус інерції відносно осі Ox .

Із виразу (39) випливає, що:

$$i_x = \sqrt{I_x / A}. \quad (40)$$

Аналогічно радіус інерції площі перерізу відносно осі Oy :

$$i_y = \sqrt{I_y / A}. \quad (41)$$

Головним центральним осям інерції відповідають головні радіуси інерції:

$$i_u = \sqrt{I_u / A}; \quad i_v = \sqrt{I_v / A}. \quad (42)$$

4 Моменти опору поперечних перерізів

На відміну від геометричних характеристик, що можуть бути визначені за допомогою інтеграла (1), моменти опору плоских перерізів можна визначити, маючи значення моментів інерції за формулами:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}; \quad W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}; \quad W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}, \quad (43)$$

де y_{\max} – відстань від центральної осі x до найбільш віддаленої точки перерізу;

x_{\max} – відстань від центральної осі y до найбільш віддаленої точки перерізу;

ρ_{\max} – відстань від початку координат (полюса) до найбільш віддаленої точки перерізу.

Моменти опору відносно головних центральних осей u, v визначаються за формулами:

$$W_u = \frac{I_u}{v_{\max}}; \quad W_v = \frac{I_v}{u_{\max}}; \quad W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}, \quad (44)$$

де v_{\max} – відстань від центральної осі u до найбільш віддаленої точки перерізу;

u_{\max} – відстань від центральної осі v до найбільш віддаленої точки перерізу.

Крім того, необхідно зауважити, що моменти опору складних перерізів не дорівнюють алгебраїчній сумі моментів опору простих частин, що складають переріз.

5 Порядок визначення геометричних характеристик

Можна рекомендувати такий порядок визначення положення головних осей та значень головних центральних моментів інерції складного поперечного перерізу, що складається з простих частин, характеристики яких легко дістати.

1. Проводимо довільну систему прямокутних координат. Розбиваємо фігуру на прості частини та визначаємо за формулами (6) положення її центра ваги.

2. Проводимо початкову систему центральних осей x_c, y_c так, щоб можна було найбільш просто визначити моменти інерції частини фігури відносно цих осей. Для цього знаходимо моменти інерції частин фігури відносно їхніх власних центральних осей, паралельно осям x_c, y_c , та користуємося формулами переходу до паралельних осей (23). Таким чином знаходимо значення моментів інерції окремих частин перерізу відносно центральних осей. Сумуємо моменти інерції окремих частин та отримаємо значення моментів інерції складної фігури відносно центральних осей.

3. Визначаємо із формули (32) кут нахилу головних центральних осей, причому вісь, проведену під меншим кутом (додатним чи від'ємним), позначимо літерою u , а перпендикулярну до неї – літерою v .

4. За формулами (37) визначаємо головні моменти інерції.

5. Моменти опору, радіуси інерції можна визначити по формулам (44) та (42) відповідно.

Приклад 2

Для перерізу, показаного на рис. 12 визначимо положення головних осей інерції, головні моменти та радіуси інерції. Розміри перерізу надані в мм.

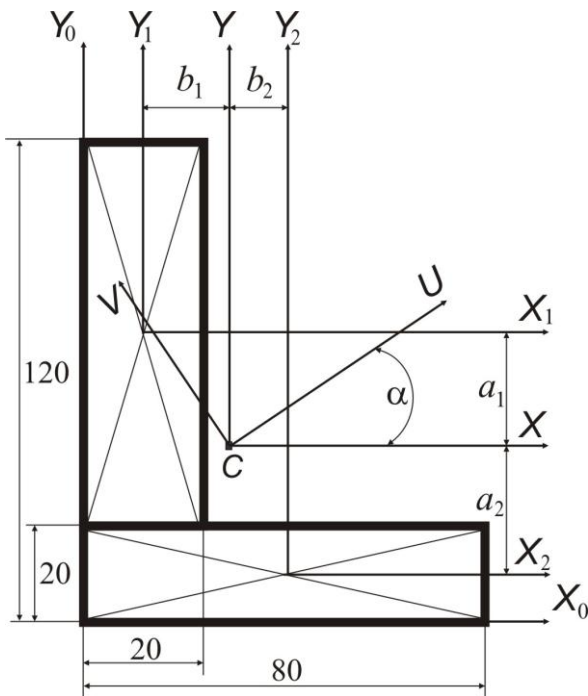


Рис. 12

Площі окремих частин:

$$A_1 = b_1 \cdot h_1 = 2 \cdot 10^3 \text{ мм}^2; \quad A_2 = b_2 \cdot h_2 = 1,6 \cdot 10^3 \text{ мм}^2.$$

Площа перерізу:

$$A = A_1 + A_2 = (2 + 1,6) \cdot 10^3 = 3,6 \cdot 10^3 \text{ мм}^2.$$

Координати центра ваги цієї фігури в системі осей $x_0 O y_0$ визначаються за формулами (6):

Розбиваємо складний переріз на два

прямокутника, розміри яких

$$b_1 = 20 \text{ мм}; \quad h_1 = 100 \text{ мм};$$

$$b_2 = 80 \text{ мм}; \quad h_2 = 20 \text{ мм}.$$

Координати центрів ваги окремих

частин можна визначити:

$$x_{c_1} = \frac{b_1}{2} = 10 \text{ мм}; \quad y_{c_1} = h_2 + \frac{h_1}{2} = 70 \text{ мм};$$

$$x_{c_2} = \frac{b_2}{2} = 40 \text{ мм}; \quad y_{c_2} = \frac{h_2}{2} = 10 \text{ мм}.$$

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{x_{c_1} \cdot A_1 + x_{c_2} \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{(10 \cdot 2 + 40 \cdot 1,6) \cdot 10^3}{(2 + 1,6) \cdot 10^3} = 23,33 \text{ мм};$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{y_{c_1} \cdot A_1 + y_{c_2} \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{(70 \cdot 2 + 10 \cdot 1,6) \cdot 10^3}{(2 + 1,6) \cdot 10^3} = 43,33 \text{ мм}.$$

Проводимо початкову систему центральних осей кожного окремого прямокутника паралельно центральним осям Ox, Oy , та визначаємо моменти інерції кожного окремого прямокутника відносно власних осей:

$$I_{x_1}^I = \frac{20 \cdot 100^3}{12} = 166,67 \cdot 10^4 \text{ мм}^4; \quad I_{y_1}^I = \frac{100 \cdot 20^3}{12} = 6,67 \cdot 10^4 \text{ мм}^4;$$

$$I_{x_2}^{II} = \frac{80 \cdot 20^3}{12} = 5,33 \cdot 10^4 \text{ мм}^4; \quad I_{y_2}^{II} = \frac{20 \cdot 80^3}{12} = 85,33 \cdot 10^4 \text{ мм}^4;$$

$$I_{x_1 y_1}^I = 0; \quad I_{x_2 y_2}^{II} = 0.$$

Координати центрів ваги окремих частин в системі координат xOy :

$$a_1 = y_{c_1} - y_c = 70 - 43,33 = 26,67 \text{ мм};$$

$$a_2 = y_{c_2} - y_c = 10 - 43,33 = -33,33 \text{ мм};$$

$$b_1 = x_{c_1} - x_c = 10 - 23,33 = -13,33 \text{ мм};$$

$$b_2 = x_{c_2} - x_c = 40 - 23,33 = 16,67 \text{ мм}.$$

Використовуючи формули для паралельного переносу (23) обчислимо моменти інерції окремих частин відносно центральних осей Ox, Oy всього поперечного перерізу:

$$I_x^I = I_{x_1}^I + a_1^2 \cdot A_1 = 166,67 \cdot 10^4 + 26,67^2 \cdot 2 \cdot 10^3 =$$

$$= (166,67 + 142,26) \cdot 10^4 = 308,93 \cdot 10^4 \text{ мм}^4 = 308,93 \text{ см}^4;$$

$$I_x^{II} = I_{x_2}^{II} + a_2^2 \cdot A_2 = 5,33 \cdot 10^4 + (-33,33)^2 \cdot 1,6 \cdot 10^3 =$$

$$= (5,33 + 177,74) \cdot 10^4 = 183,07 \cdot 10^4 \text{ мм}^4 = 183,07 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned}
I_y^I &= I_{y_1}^I + b_1^2 \cdot A_1 = 6,67 \cdot 10^4 + (-13,33)^2 \cdot 2 \cdot 10^3 = \\
&= (6,67 + 35,54) \cdot 10^4 = 42,21 \cdot 10^4 \text{ мм}^4 = 42,21 \text{ см}^4; \\
I_y^{II} &= I_{y_2}^{II} + b_2^2 \cdot A_2 = 85,33 \cdot 10^4 + 16,67^2 \cdot 1,6 \cdot 10^3 = \\
&= (85,33 + 44,46) \cdot 10^4 = 129,79 \cdot 10^4 \text{ мм}^4 = 129,79 \text{ см}^4; \\
I_{xy}^I &= I_{x_1 y_1}^I + a_1 b_1 \cdot A_1 = \\
&= 26,67 \cdot (-13,33) \cdot 2 \cdot 10^3 = -71,10 \cdot 10^4 \text{ мм}^4 = -71,10 \text{ см}^4; \\
I_{xy}^{II} &= I_{x_2 y_2}^{II} + a_2 b_2 \cdot A_2 = \\
&= -33,33 \cdot 16,67 \cdot 1,6 \cdot 10^3 = -88,90 \cdot 10^4 \text{ мм}^4 = -88,90 \text{ см}^4.
\end{aligned}$$

Моменти інерції відносно центральних осей Ox, Oy поперечного перерізу можна визначити сумуючи моменти інерції двох прямокутників відносно цих же осей:

$$\begin{aligned}
I_x &= I_x^I + I_x^{II} = 308,93 + 183,07 = 492,00 \text{ см}^4; \\
I_y &= I_y^I + I_y^{II} = 42,21 + 129,79 = 172,00 \text{ см}^4; \\
I_{xy} &= I_{xy}^I + I_{xy}^{II} = -71,10 - 88,90 = -160,00 \text{ см}^4.
\end{aligned}$$

Кут нахилу головних центральних осей до осі x визначимо за формулою (32):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2 \cdot (-160)}{172 - 492} = 1,$$

звідки $\alpha_0 = 22^\circ 30'$.

Головні центральні моменти інерції визначаємо за формулами (37):

$$\begin{aligned}
I_u &= \frac{1}{2} \left[(I_x + I_y) + \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[(492 + 172) + \sqrt{(492 - 172)^2 + 4 \cdot (-160)^2} \right] = \\
&= \frac{1}{2} (664 + 452,55) = 558,28 \text{ см}^4;
\end{aligned}$$

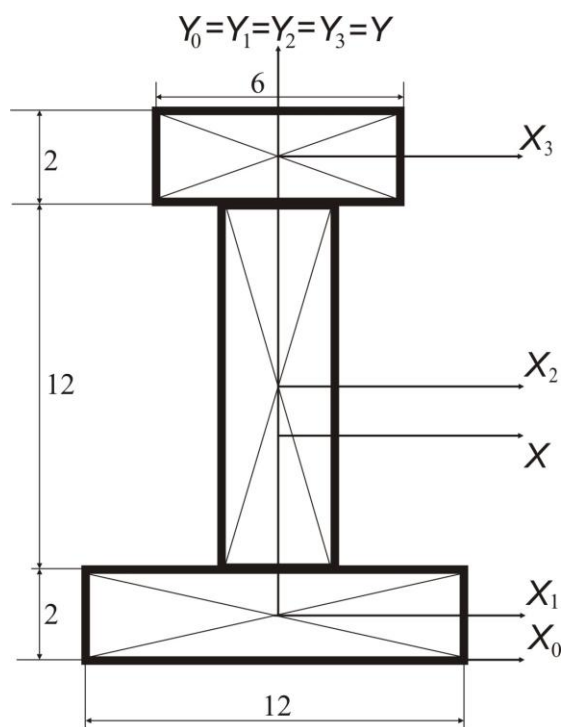
$$\begin{aligned}
 I_v &= \frac{1}{2} \left[(I_x + I_y) - \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[(492 + 172) - \sqrt{(492 - 172)^2 + 4 \cdot (-160)^2} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} (664 - 452,55) = 105,73 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

Головні центральні радіуси інерції:

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} = \sqrt{\frac{558,28}{36}} = 3,94 \text{ см}; \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}} = \sqrt{\frac{105,73}{36}} = 1,71 \text{ см}.$$

Приклад 3

Для перерізу, показаного на рис. 13 визначити геометричні характеристики перерізу. Розміри перерізу надані в мм.



Розбиваємо складний переріз на три прямокутника, розміри яких

$$b_1 = 12 \text{ см}; \quad h_1 = 2 \text{ см};$$

$$b_2 = 2 \text{ см}; \quad h_2 = 12 \text{ см};$$

$$b_3 = 6 \text{ см}; \quad h_3 = 2 \text{ см}.$$

Площі окремих частин:

$$A_1 = b_1 \cdot h_1 = 24 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = b_2 \cdot h_2 = 24 \text{ см}^2;$$

$$A_3 = b_3 \cdot h_3 = 12 \text{ см}^2.$$

Вісь Y_0 поперечного перерізу є віссю симетрії, тому центри ваги окремих частин, а також і центр ваги всього

Рис. 13

перерізу лежать на осі Y_0 , тому $x_c = x_{c_1} = x_{c_2} = x_{c_3} = 0$.

Виходячи з цього, необхідно визначати тільки координати:

$$y_{c_1} = \frac{h_1}{2} = 1 \text{ см};$$

$$y_{c_2} = h_1 + \frac{h_2}{2} = 8 \text{ см};$$

$$y_{c_3} = h_1 + h_2 + \frac{h_3}{2} = 15 \text{ см}.$$

Площа перерізу:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = (24 + 24 + 12) = 60 \text{ см}^2.$$

Координати центра ваги поперечного перерізу в системі осей x_0Oy_0 визначаються за формулами (6):

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^3 S_{xi}}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{y_{c_1} \cdot A_1 + y_{c_2} \cdot A_2 + y_{c_3} \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} =$$

$$= \frac{1 \cdot 24 + 8 \cdot 24 + 15 \cdot 12}{60} = 6,6 \text{ см}.$$

Проводимо початкову систему центральних осей кожного окремого прямокутника паралельно центральним осям Ox, Oy , та визначаємо моменти інерції кожного окремого прямокутника відносно власних осей:

$$I_{x_1}^I = \frac{12 \cdot 2^3}{12} = 8,0 \text{ см}^4; \quad I_{y_1}^I = \frac{2 \cdot 12^3}{12} = 288,0 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_2}^{II} = \frac{2 \cdot 12^3}{12} = 288,0 \text{ см}^4; \quad I_{y_2}^{II} = \frac{12 \cdot 2^3}{12} = 8,0 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_3}^{III} = \frac{6 \cdot 2^3}{12} = 4,0 \text{ см}^4; \quad I_{y_3}^{III} = \frac{2 \cdot 6^3}{12} = 36,0 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_1y_1}^I = 0; \quad I_{x_2y_2}^{II} = 0; \quad I_{x_3y_3}^{III} = 0.$$

Координати центрів ваги окремих частин в системі координат xOy :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= y_{c_1} - y_c = 1 - 6,6 = -5,6 \text{ см}; \\
 a_2 &= y_{c_2} - y_c = 8 - 6,6 = 1,4 \text{ см}; \\
 a_3 &= y_{c_3} - y_c = 15 - 6,6 = 8,4 \text{ см}; \\
 b_1 &= b_2 = b_3 = 0.
 \end{aligned}$$

Використовуючи формули для паралельного переносу (23) обчислимо моменти інерції окремих частин відносно центральної осі Ox всього поперечного перерізу:

$$\begin{aligned}
 I_x^I &= I_{x_1}^I + a_1^2 \cdot A_1 = 8,00 + (-5,6)^2 \cdot 24 = \\
 &= 8,00 + 752,64 = 760,64 \text{ см}^4; \\
 I_x^{II} &= I_{x_2}^{II} + a_2^2 \cdot A_2 = 288,00 + 1,4^2 \cdot 24 = \\
 &= 288,00 + 47,04 = 335,04 \text{ см}^4; \\
 I_x^{III} &= I_{x_3}^{III} + a_3^2 \cdot A_3 = 4,00 + 8,4^2 \cdot 12 = \\
 &= 4,00 + 846,72 = 850,72 \text{ см}^4; \\
 I_y^I &= I_{y_1}^I = 288,00 \text{ см}^4; \\
 I_y^{II} &= I_{y_2}^{II} = 8,00 \text{ см}^4; \\
 I_y^{III} &= I_{y_3}^{III} = 36,00 \text{ см}^4; \\
 I_{xy}^I &= I_{xy}^{II} = I_{xy}^{III} = 0.
 \end{aligned}$$

Моменти інерції відносно центральних осей Ox, Oy поперечного перерізу можна визначити сумуючи моменти інерції трьох прямокутників відносно цих же осей:

$$\begin{aligned}
 I_x &= I_x^I + I_x^{II} + I_x^{III} = 760,64 + 335,04 + 850,72 = 1946,40 \text{ см}^4; \\
 I_y &= I_y^I + I_y^{II} + I_y^{III} = 288,00 + 8,00 + 36,00 = 332,00 \text{ см}^4; \\
 I_{xy} &= I_{xy}^I + I_{xy}^{II} + I_{xy}^{III} = 0.
 \end{aligned}$$

Отже, дійсно, відцентровий момент у випадку, коли одна з осей є віссю симетрії дорівнює нулю. Таким чином, вісь симетрії Oy та її перпендикулярна

Ox є головними центральними осями (кут нахилу головних центральних осей до осі x дорівнює $\alpha_0 = 0$).

Моменти інерції відносно осей x, y є головними центральними моментами інерції.

Головні центральні радіуси інерції:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{1946,4}{60}} = 5,7 \text{ см}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{332,0}{60}} = 2,4 \text{ см}.$$

Для визначення моментів опору поперечного перерізу необхідно визначити найбільш віддалені точки перерізу від головних центральних осей. Вздовж осі x найбільш віддаленими будуть точки першого прямокутника – $x_{\max} = \frac{b_1}{2} = 6 \text{ см}$. Вздовж осі y найбільш віддаленими будуть точки, що знаходяться зверху чи знизу перерізу. Відстань до верхньої точки можна визначити – $y_{\text{верх.}} = h_1 + h_2 + h_3 - y_c = 9,4 \text{ см}$. Відстань до нижньої точки можна визначити – $y_{\text{низ.}} = y_c = 6,6 \text{ см}$. Отже, $y_{\max} = y_{\text{верх.}} = 9,4 \text{ см}$.

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{1946,4}{9,4} = 207,06 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} = \frac{332,0}{6,0} = 55,33 \text{ см}^3.$$

6 Розрахунково - проектувальне завдання

Для кращої організації і більш ефективної самостійної роботи студентів, згідно з вимогами програми курсу “Опір матеріалів”, студентам пропонується до виконання розрахунково – проектувальне завдання (РПЗ) по темі “Геометричні характеристики поперечних перерізів”. Виконуючи цю роботу, студент практично знайомиться з методами обчислення геометричних характеристик, які в подальшому будуть використовуватись при оцінці міцності машинобудівних конструкцій

6.1 Склад розрахунково - проектувального завдання

Розрахунково-проектувальне завдання складається з трьох етапів:

1. Рішення запропонованих викладачем задач для певних варіантів розрахункових схем і вихідних даних, оформлення їх за вимогами кафедри опору матеріалів.
2. Написання контрольних робіт за темою РПЗ.
3. Захист РПЗ. Захист включає в себе пояснення методів і принципів розв'язання задач і відповідь на контрольні теоретичні запитання. Кількість та об'єм цих запитань визначається викладачем індивідуально для кожного студента.

Мета роботи – визначення геометричних характеристик поперечних перерізів для запропонованих розрахункових схем.

Дано:

Схема заданого поперечного перерізу з вказівкою параметру ℓ , через який виражені всі розміри поперечного перерізу стержня.

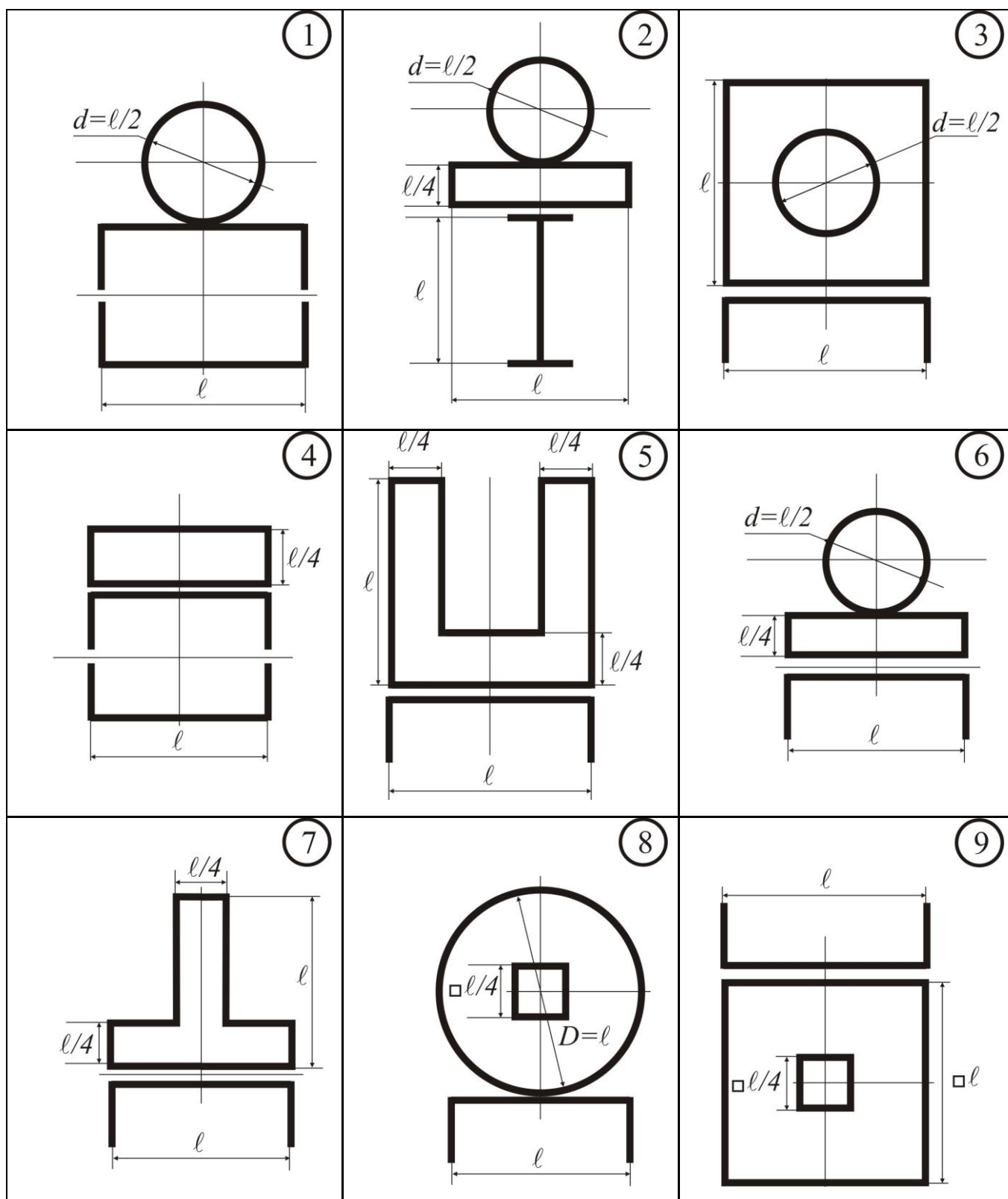
РПЗ складається з обов'язкової для рішення задачі:

Варіанти розрахункових схем наведені в додатку А, для непарних номерів по списку журналу групи $\ell = 12$ см, а для парних - $\ell = 16$ см .

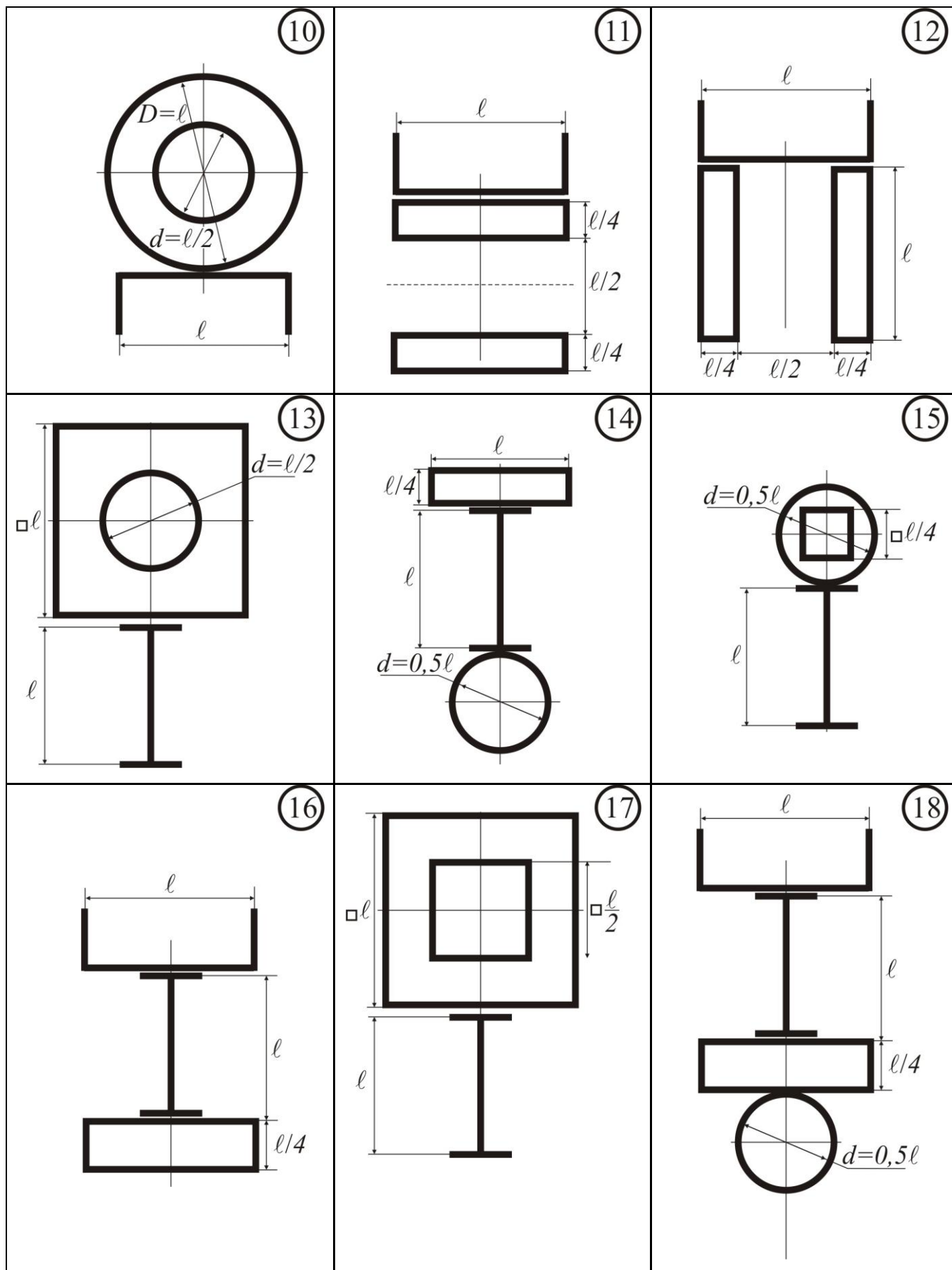
ДОДАТКИ

Додаток А

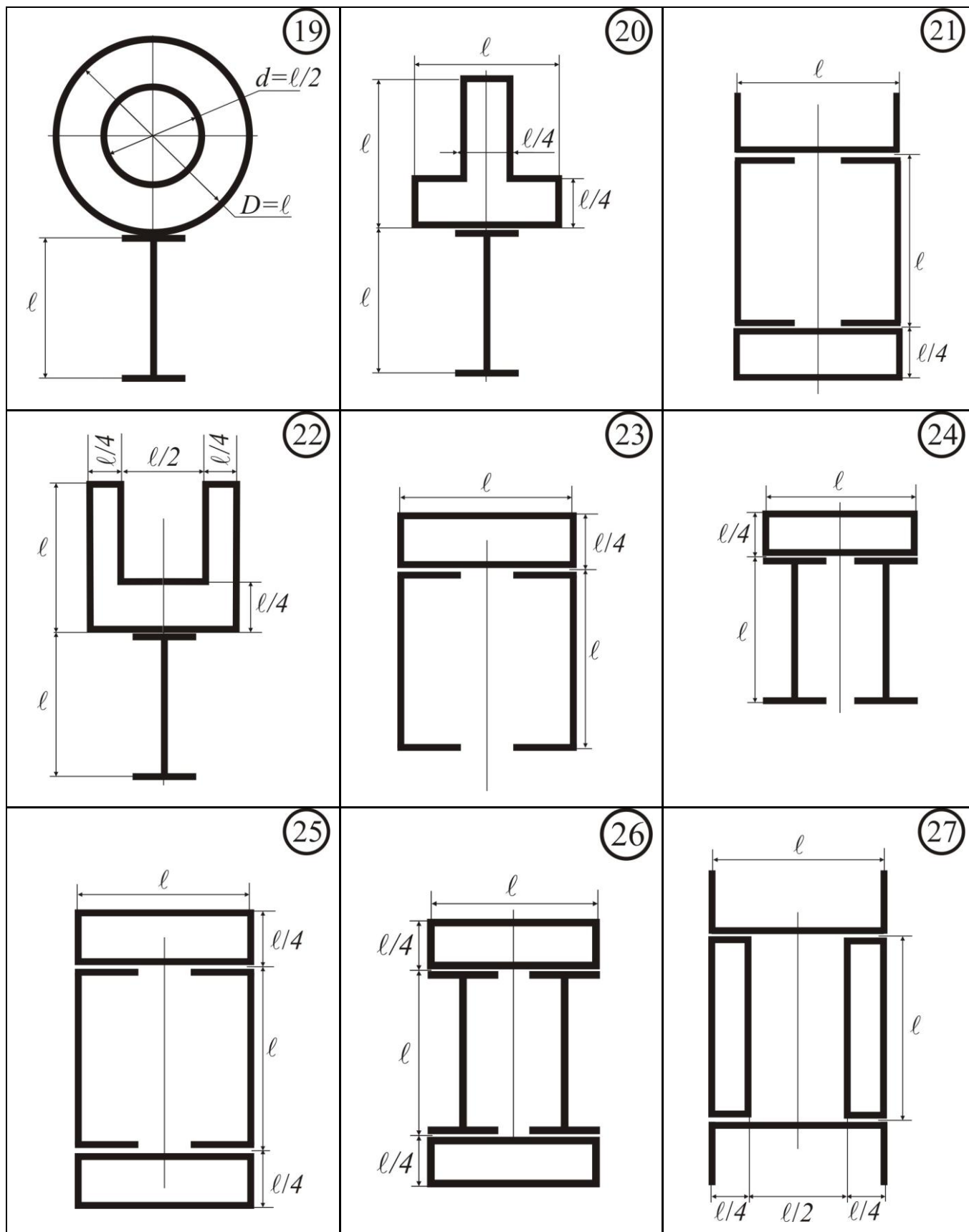
Розрахункові дані



Продовження додатка А



Закінчення додатка А

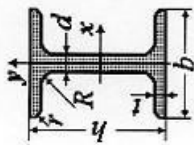


Додаток Б

Геометричні характеристики прокатних профілів

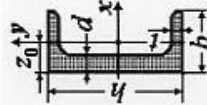
Балки двотаврові (ГОСТ 8239–89)

Позначення:

 h – висота балки; b – ширина полиці; d – товщина стінки; t – середня товщина полиці; I – момент інерції; W – момент опору; i – радіус інерції; S – статичний момент півперерізу.

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, A , cm^2	I_x , cm^4	W_x , cm^3	i_x , cm	S_x , cm^3	I_y , cm^4	W_y , cm^3	i_y , cm	Маса 1 м, кг.
	h	b	d	t									
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	203	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57,0
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	108

Швелери (ГОСТ 8240–89)



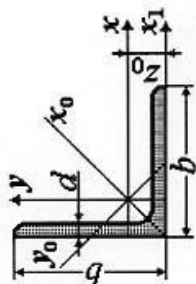
Позначення:

h – висота балки;
 b – ширина полиці;
 d – товщина стінки;
 t – середня товщина полиці;

I – момент інерції;
 W – момент опору;
 i – радіус інерції;
 S – статичний момент півперерізу;
 z_0 – відстань від осі y до зовнішньої грані стінки.

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, $A, \text{см}^2$	$I_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$I_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$	$z_0, \text{см}$	Маса 1 м, кг.
	h	b	d	t										
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80	14,2
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94	16,3
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	19,8
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,0
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,0
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3

Кутники рівнобокі (ГОСТ 8509-86)



Позначення:

b – ширина полиці;
 d – товщина полиці;

I – момент інерції;
 i – радіус інерції;

z_0 – відстань від осі y до зовнішньої грані полиці,.

Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу, $A, \text{см}^2$	$I_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$I_{x_0 \max}, \text{см}^4$	$i_{x_0 \max}, \text{см}$	$I_{y_0 \min}, \text{см}^4$	$i_{y_0 \min}, \text{см}$	$I_{x_1}, \text{см}^4$	$z_0, \text{см}$	Маса 1 м, кг.
	b	d										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33	2,32
		4	3,98	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38	3,05
		5	4,80	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42	3,77
		6	5,52	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52	3,44
6,3	63	5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57	4,25
		4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69	3,90
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74	4,81
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	50,0	1,78	5,72
6,5	65	6	7,52	29,85	1,99	47,38	2,51	12,32	1,28	57,3	1,83	5,91
		7	9,84	38,13	1,97	60,42	2,27	15,85	2,48	72,9	1,90	7,73
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37

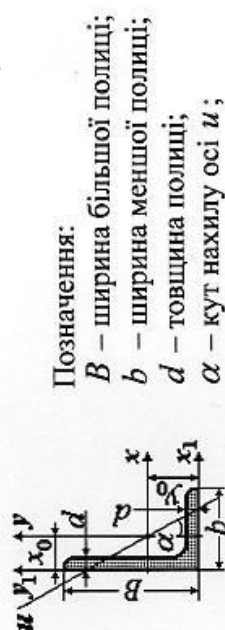
Продовження додатка Б

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,8
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113	2,15	9,02
		9	12,8	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18	10,10
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19	7,36
		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23	8,51
		8	12,3	73,4	2,34	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27	9,65
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43	8,33
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47	9,64
		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51	10,9
		9	15,6	118	2,75	186	3,96	48,6	1,77	219	2,55	12,2
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68	10,1
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71	10,8
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75	12,2
		10	19,2	179	2,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83	15,1
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91	17,9
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99	20,6
		16	29,7	264	2,98	416	3,74	112,0	1,94	542	3,06	23,3
11	110	7	15,7	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96	11,9
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00	13,5
12,5	125	8	19,7	294	3,37	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	29,6

Продовження додатка Б

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5
16	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4
		11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
20	200	12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1
		12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	14753	7,31	111,4

Кутники нерівнобокі (ГОСТ 8510-86)



I – момент інерції;
 i – радіус інерції;
 x_0, y_0 – відстань від центра ваги до зовнішніх граней полиць.

Номер проф.	Розміри, мм		Площа перерізу $A, \text{см}^2$	$I_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$I_y, \text{см}^4$	$i_y, \text{см}$	$I_{u \min}, \text{см}^4$	$i_{u \min}, \text{см}$	$\text{tg} \alpha$	$I_{x_1}, \text{см}^4$	$I_{y_1}, \text{см}^4$	$x_0, \text{см}$	$y_0, \text{см}$	Маса $l \text{ м, кг.}$	
	B	b														
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,4	1,78	3,7	1,02	2,19	0,78	0,406	23,2	6,25	0,84	1,82	2,81
			5	4,41	13,8	1,77	4,48	1,01	2,66	0,78	0,404	29,2	7,91	0,88	1,86	3,46
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,397	33,0	8,51	0,91	2,03	3,17
			5	4,98	19,9	2,00	6,26	1,12	3,72	0,86	0,396	41,4	10,8	0,95	2,08	3,91
			6	5,90	23,3	1,99	7,28	1,11	4,36	0,86	0,393	49,9	13,1	0,99	2,12	4,63
			8	7,68	29,6	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	0,386	66,9	17,9	1,07	2,20	6,03
7/4,5	70	45	5	5,59	27,8	2,23	9,05	1,27	5,34	0,98	0,406	56,7	15,2	1,05	2,28	4,39
7,5/5	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	69,7	20,8	1,17	2,39	4,79
			6	7,25	40,9	2,38	14,6	1,42	8,48	1,08	0,435	83,9	25,2	1,21	2,44	5,69
			8	9,47	52,4	2,35	18,5	1,40	10,9	1,07	0,430	112	34,2	1,29	2,52	7,43
8/5	80	50	5	6,36	41,6	2,56	12,7	1,41	7,58	1,09	0,387	84,6	20,8	1,13	2,60	4,99
			6	7,55	49,0	2,55	14,8	1,40	8,88	1,08	0,386	102	25,2	1,17	2,65	5,92
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	11,8	1,22	0,384	132	32,2	1,26	2,92	6,17
			6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	145	35,2	1,28	2,95	6,70
			8	11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	16,3	1,21	0,380	194	47,8	1,36	3,04	8,77

Закінчення додатка Б

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
10/6,3	100	63	6	9,59	98,3	3,2	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	198	49,9	1,42	3,23	7,53
			7	11,1	113	3,19	35,0	1,78	20,8	1,37	0,392	232	58,7	1,46	3,28	870
			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	266	67,6	1,50	3,32	9,87
			10	15,5	154	3,15	47,1	1,75	28,3	1,35	0,387	333	85,8	1,58	3,40	12,10
11/7	110	70	6,5	11,4	142	3,53	45,6	2,00	26,9	1,53	0,402	285	74,3	1,58	3,55	8,98
			8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,400	353	92,3	1,64	3,61	10,90
12,5/8	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	452	119	1,80	4,01	11,0
			8	16,0	256	4,00	83,0	2,28	48,8	1,75	0,406	518	137	1,84	4,05	12,5
			10	19,7	312	3,98	100	2,27	59,3	1,74	0,404	649	173	1,92	4,14	15,5
			12	23,4	365	3,95	117	2,24	69,5	1,72	0,400	781	210	2,00	4,22	18,3
14/9	140	90	8	18,0	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	727	104	2,03	4,49	14,1
			10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	911	245	2,12	4,58	17,5
			9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,20	0,391	1221	300	2,23	5,19	18,0
			10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,390	1359	335	2,28	5,23	19,8
16/10	160	100	12	30,0	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	1634	405	2,36	5,32	23,6
			14	34,7	897	5,08	272	2,80	162	2,16	0,385	1910	477	2,43	5,40	27,3
			10	28,3	952	5,80	276	3,12	165	2,42	0,375	1933	444	2,44	5,88	22,2
			12	33,7	1123	5,77	324	3,10	194	2,40	0,374	2324	537	2,52	5,97	26,4
18/11	180	110	12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	3189	786	2,83	6,54	29,7
			14	43,9	1801	6,41	551	3,59	327	2,73	0,390	3726	922	2,91	6,62	34,4
			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	4264	1061	2,99	6,71	39,1
			12	48,3	3147	8,07	1032	4,62	604	3,54	0,410	6212	1634	3,53	7,97	37,9
20/12,5	200	125	16	63,6	4091	8,02	1333	4,58	781	3,50	0,408	8308	2200	3,69	8,14	49,9
			18	71,1	4545	7,99	1475	4,56	896	3,49	0,407	9358	2487	3,77	8,23	55,8

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. Писаренко Г.С. Опір матеріалів / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський – Київ: Вища шк., 2004. – 655 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев – М.: Наука, 1986. – 512 с.
3. Беляев Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев – М.: Наука, 1965. – 856 с.

Лист для правок

[illegible]

Навчальне видання

КОНОХОВ Володимир Іванович
ПОГОРІЛОВ Сергій Юрійович
КОНКІН Валерій Миколайович

ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

Навчально - методичний посібник з розділу курсу “Опір матеріалів”
для студентів машинобудівних спеціальностей.

Відповідальний за випуск проф. Хавін В.Л.

Роботу до друку рекомендував доц. Шелковий С.К.

В авторській редакції

План 2019 р., поз. 1

Підп. до друку .19. Формат 60x84 1/16. Папір Могра.

Друк – ризографія. Гарнітура Таймс. Ум.друк. арк. 3,1

Наклад 100. Зам. №_____ Ціна _____.

Видавничий центр НТУ “ХП”.

61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

Самостійне електронне видання